FACTORIZACION LU.

La factorización **LU** es un procedimiento para expresar una matriz cuadrada **A** no singular, como el producto de dos matrices, Un matriz **L** (Low) triangular superior y otra matriz **U** (Up) triangular inferior con unos en su diagonal principal. , es decir **A = LU**.

Miremos la factorización para una matriz cuadrada 3x3.

Ejemplo. Sea la matriz, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, encontrar la factorización LU.

Sea $L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ como **A = LU** se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

efectuando la multiplicación se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ l_{3} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} \end{pmatrix}$$

Aplicando la igualdad de matrices se obtienen los valores de **L** y de **U**.

$l_{11} = a_{11}$; $l_{21} = a_{21}$; $l_{31} = a_{31}$

Observe que la primera columna de la matriz **L** , es igual a la primera columna de la matriz **A**. así **L** tiene la forma:

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & l_{22} & 0 \\ a_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

Si para la factorización se toman las matrices **L** y **U** de la forma:

Sea $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$

Al efectuar la multiplicación entre las matrices e igualar el producto con la matriz A , se llega a que la primera fila de la matriz A es igual a la primera fila de la matriz U, siendo esta de la forma.

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Sea la matriz, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, encontrar la factorización LU.

Sea $L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ como **A = LU** se tiene:

Pero L tiene forma: $L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & l_{22} & 0 \\ 2 & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & l_{22} & 0 \\ 2 & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuando la multiplicación se tiene:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3u_{12} & 3u_{13}\\ 1 & 1*u_{12}+1*l_{22} & 1*u_{13}+l_{22}u_{23}\\ 2 & 2u_{12}+l_{32} & 2u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33}\end{pmatrix}$$

Aplicando el criterio igualdad de matrices, se llega a:

$3u_{12}=-1 \rightarrow u_{12}=\dfrac{-1}{3}$; $3u_{13}=2 \rightarrow u_{13}=\dfrac{2}{3}$,

$1*u_{12}+1*l_{22}=2$, de donde $l_{22}=2-\left(\dfrac{-1}{3}\right)=\dfrac{7}{3}$

$1*u_{13}+l_{22}u_{23}=3$, de donde $u_{23}=\dfrac{3-1*u_{13}}{l_{22}}=\dfrac{3-\frac{2}{3}}{\frac{7}{3}}=\dfrac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{3}}=1$

$2u_{12}+l_{32}=-2$ de donde : $l_{32}=-2-2u_{12}=-2-2\left(\dfrac{-1}{3}\right)=\dfrac{-4}{3}$

$2u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33}=-1$; $l_{33}=-1-2u_{13}-l_{32}u_{23}$

$l_{33} = -1 - 2\left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{-4}{3}\right)(1) = -1$, luego las matrices buscadas son:

Sea $L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7/3 & 0 \\ 2 & -4/3 & -1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Y así se tiene la factorización:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7/3 & 0 \\ 2 & -4/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una segunda forma para encontrar la factorización **A = LU**, consiste en realizar operaciones entre las filas de la matriz **A**, hasta obtener ceros debajo de la diagonal principal y unos en ella. Siendo **U** la matriz encontrada.

EJEMPLO- Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ encuentre la factorización LU.

Efectuamos operaciones entre las filas.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}_{\substack{F2 \to 3F2 - F1 \\ F3 \to 3F3 - 2F1}}$$ se tiene: $$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & -4 & -7 \end{pmatrix}_{F2 \to \frac{F2}{7}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -7 \end{pmatrix}_{F3 \to F3 + 4F2} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{\substack{F3 \to \frac{F3}{-3} \\ F1 \to \frac{F1}{3}}} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz **U** es igual a: $U = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ahora como se conoce la forma que debe tener la matriz **L** ,

$L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & l_{22} & 0 \\ 2 & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$, al multiplicarlas se tiene:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & l_{22} & 0 \\ 2 & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & \frac{-1}{3} + l_{22} & \frac{2}{3} + l_{22} \\ 2 & \frac{-2}{3} + l_{32} & \frac{4}{3} + l_{22} + l_{33} \end{pmatrix}$$

De donde: $\frac{-1}{3} + l_{22} = 2$, lo implica que $l_{22} = \frac{7}{3}$

$\frac{-2}{3} + l_{32} = -2$, con lo que $l_{32} = \frac{-4}{3}$

$\frac{4}{3} + l_{22} + l_{33} = -1$, lo que da : $l_{33} = -1$ y la factorización es:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7/3 & 0 \\ 2 & -4/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

FACTORIZACION PARA MATRICES NO CUADRADAS.

Sea **A** una matriz m x n . suponga que **A** e puede reducir a su forma escalonada por renglones sin realizar permutaciones. Entonces existe una matriz **L** triangular inferior de m x m con unos en su diagonal principal y una matriz **U** de m x n con u_{ij} = si i > j tal que **A = LU.**

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$, existen las matrices:

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}$$ y $$U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ tal que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al efectuar la multiplicación de las matrices e igualar el resultado con la matriz **A** , se observa que la primera fila de la matriz **A** es igual a la primera fila de la matriz **U**, y como la matriz **L** tiene la primera columna igual a la primera columna de la matriz A , se tiene que la factorización toma la forma.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ a_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con lo que se pueden determinar con facilidad los otros valores.

Ejemplo. Encontrar una factorización para la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 5 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -12 \end{pmatrix}$$

las matrices buscadas tienen la forma:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & l_{32} & 1 & 0 \\ 4 & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 5 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & l_{32} & 1 & 0 \\ 4 & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Efectuando operaciones tenemos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 5 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2+u_{22} & -3+u_{23} \\ 6 & 12+l_{32}u_{22} & 18+l_{32}u_{23}+u_{33} \\ 4 & 8+l_{42}u_{22} & 12+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} \end{pmatrix}$$

Con lo que se tiene:

$-2+u_{22}=-4$ o $u_{22}=-2$; $-3+u_{23}=5$ o $u_{23}=8$

$12+l_{32}u_{22}=-3$ o $l_{32}=\dfrac{-3-12}{-2}=\dfrac{15}{2}$

$18+l_{32}u_{23}+u_{33}=2$ o $u_{33}=2-18-l_{32}u_{23}=-16-\left(\dfrac{15}{2}\right)(8)=-76$

$$8 + l_{42}u_{22} = 1$$ o $$l_{42} = \frac{1-8}{u_{22}} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$$

$$12 + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} = -12$$ o

$$l_{43} = \frac{-12-12-\left(\frac{7}{2}\right)(8)}{-76} = \frac{-24-28}{-76} = \frac{52}{76} = \frac{13}{19}$$

Luego la factorización queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 5 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 15/2 & 1 & 0 \\ 4 & 7/2 & 13/19 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -76 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDAD.

Encuentre una factorización **LU** para las siguientes matrices.

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ 6 & -3 & 8 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}$